



**CENTRALNA  
KOMISJA  
EGZAMINACYJNA**

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015**

**FORMUŁA OD 2015  
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA  
ARKUSZE  
MMA-P1**

**SIERPIEŃ 2015**

### Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	C	D	D	B	C	D	A	C	B	A	C	A	B	C	B	B	C	B	A	D	A	A	D	C	D

### Schemat oceniania zadań otwartych

#### Zadanie 26. (2 pkt)

Rozwiąż równanie  $\frac{2x-4}{x} = \frac{x}{2x-4}$ , gdzie  $x \neq 0$  i  $x \neq 2$ .

#### Rozwiązanie

Równanie ma sens, gdy  $x \neq 0$  i  $x \neq 2$ .

Przekształcając równanie w sposób równoważny, otrzymujemy

$$\frac{2x-4}{x} - \frac{x}{2x-4} = 0,$$
$$\frac{(2x-4)^2 - x^2}{x(2x-4)} = 0.$$

Stąd

$$(2x-4)^2 - x^2 = 0,$$
$$3x^2 - 16x + 16 = 0.$$

Wyróżnik trójmianu  $3x^2 - 16x + 16$  jest równy  $\Delta = 16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 64$ , więc pierwiastkami tego trójmianu są liczby  $x_1 = \frac{4}{3}$ ,  $x_2 = 4$ . Obie te liczby są rozwiązaniami równania.

#### Uwaga

Możemy także wykorzystać własność proporcji (iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych) i wówczas otrzymujemy  $(2x-4)^2 = x^2$ .

#### Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.  
gdy zapisze równanie w postaci równania kwadratowego, np.:  $(2x-4)^2 - x^2 = 0$ .

Zdający otrzymuje ..... 2 p.  
gdy wyznaczy rozwiązania równania:  $x_1 = \frac{4}{3}$ ,  $x_2 = 4$ .

#### Zadanie 27. (2 pkt)

Mamy dwa pudełka: w pierwszym znajduje się 6 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 6, a w drugim – 8 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 8. Losujemy po jednej kuli z każdego pudełka i tworzymy liczbę dwucyfrową w ten sposób, że numer kuli wylosowanej z pierwszego pudełka jest cyfrą dziesiątek, a numer kuli wylosowanej z drugiego – cyfrą jedności tej liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że utworzona liczba jest podzielna przez 11.

#### Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są liczby dwucyfrowe, w których cyfra dziesiątek jest jedną spośród: 1, 2, 3, 4, 5, 6, a cyfra jedności – jedną spośród: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Zatem

$$\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, \\ 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, \\ 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 6 \cdot 8 = 48$ .

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na tym, że utworzona liczba jest podzielna przez 11. Zdarzeniu  $A$  sprzyja 6 zdarzeń elementarnych: 11, 22, 33, 44, 55, 66. Zatem

$$|A| = 6.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{6 \cdot 8} = \frac{1}{8}.$$

### Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.  
gdy poda

- liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 6 \cdot 8 = 48$

albo

- liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ :  $|A| = 6$

albo

- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ : 11, 22, 33, 44, 55, 66.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{6}{48}$  lub  $P(A) = \frac{1}{8}$ .

### Uwagi

1. Jeżeli otrzymany wynik końcowy jest liczbą większą od 1, to zdający otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający poda jedynie  $P(A) = \frac{6}{48}$ , to otrzymuje **1 punkt**.

### Zadanie 28. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność  $20x \geq 4x^2 + 24$ .

### Rozwiązanie

Przekształcamy nierówność do postaci równoważnej  $4x^2 - 20x + 24 \leq 0$ ,

a następnie do postaci  $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ .

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

#### Pierwszy etap rozwiązania:

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x^2 - 5x + 6$ :

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając na wykresie  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$  lub  $(x-2)(x-3)$

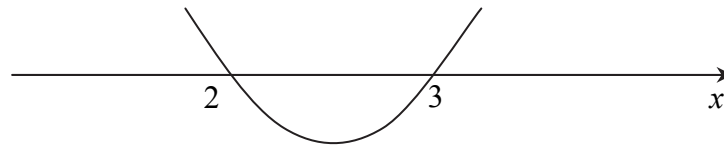
albo

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu, a następnie stosujemy wzory na pierwiastki:

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1, \quad x_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

**Drugi etap rozwiązania:**

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $2 \leq x \leq 3$  lub  $\langle 2, 3 \rangle$  lub  $x \in \langle 2, 3 \rangle$ , np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ .



**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np.  $(x-2)(x-3)$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = 2, x_2 = 3$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy:

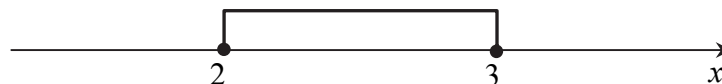
- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $2 \leq x \leq 3$  lub  $\langle 2, 3 \rangle$  lub  $x \in \langle 2, 3 \rangle$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $2 \leq x \leq 3$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



**Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

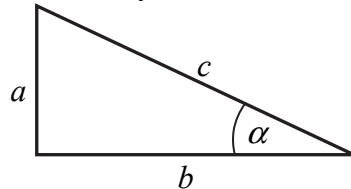
1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu  $x_1 = 2, x_2 = 3$  i zapisze, np.  $x \in \langle 2, -3 \rangle$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków. Za takie rozwiązanie zdający otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci  $x \in \langle 3, 2 \rangle$ , to przyznajemy **2 punkty**.

**Zadanie 29. (2 pkt)**

Kąt  $\alpha$  jest ostry i spełnia równość  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{7}{2}$ . Oblicz wartość wyrażenia  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ .

**I sposób rozwiązania**

Rysujemy trójkąt prostokątny i wprowadzamy oznaczenia.



Korzystając z definicji funkcji tangens w trójkącie prostokątnym, lewą stronę równości  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{7}{2}$  możemy zapisać, a następnie przekształcić następująco:

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{c^2}{ab}.$$

Z drugiej strony zauważmy, że szukane wyrażenie  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  jest równe  $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c^2}$ .

Ponieważ  $\frac{c^2}{ab} = \frac{7}{2}$ , więc  $\frac{ab}{c^2} = \frac{2}{7}$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy wykorzysta definicje lub własności funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym, doprowadzi wyrażenie  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  do postaci  $\frac{c^2}{ab}$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy obliczy i zapisze, że wartość szukanego wyrażenia  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  jest równa  $\frac{2}{7}$ .

**II sposób rozwiązania**

Ponieważ  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$ , więc z równości  $\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{7}{2}$  wynika, że szukany iloczyn  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  przyjmuje wartość  $\frac{2}{7}$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy zapisze

- $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

albo

- $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy i zapisze, że wartość szukanego wyrażenia  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  równa się  $\frac{2}{7}$ .

### III sposób rozwiązania

Ponieważ  $\alpha$  jest kątem ostrym, więc  $\operatorname{tg} \alpha > 0$  i równość  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{7}{2}$  możemy zapisać w postaci

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{7}{2} \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0.$$

Równanie powyższe ma dwa rozwiązania:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}.$$

Gdy  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}$ , to  $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{98 + 14\sqrt{33}}}$  i  $\sin \alpha = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{33}}{14}}$ . Wtedy

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{33}}{14}} \cdot \frac{4}{\sqrt{98 + 14\sqrt{33}}} = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{33}}{14}} \cdot \frac{16}{98 + 14\sqrt{33}} = \sqrt{\frac{16(7 + \sqrt{33})}{14 \cdot 14(7 + \sqrt{33})}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}.$$

Gdy zaś  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}$ , to  $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{98 - 14\sqrt{33}}}$  i  $\sin \alpha = \sqrt{\frac{7 - \sqrt{33}}{14}}$ . Wtedy

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sqrt{\frac{7 - \sqrt{33}}{14}} \cdot \frac{4}{\sqrt{98 - 14\sqrt{33}}} = \sqrt{\frac{7 - \sqrt{33}}{14}} \cdot \frac{16}{98 - 14\sqrt{33}} = \sqrt{\frac{16(7 - \sqrt{33})}{14 \cdot 14(7 - \sqrt{33})}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}.$$

### Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze, że równanie  $\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{7}{2} \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0$  ma dwa rozwiązania:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}$ , a ponadto w jednym przypadku obliczy wartość  $\cos \alpha$  i  $\sin \alpha$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy i zapisze, że wartość szukanego wyrażenia  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  równa się  $\frac{2}{7}$ .

### Uwaga

Jeżeli zdający obliczy jedną z wartości  $\operatorname{tg} \alpha$ , np.:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}$ , poda jej wartość

przybliżoną 0,3139, odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta  $\alpha \approx 17^\circ$  oraz przybliżone wartości  $\sin \alpha \approx 0,2924$ ,  $\cos \alpha \approx 0,9563$  i na tej podstawie obliczy przybliżoną wartość wyrażenia  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \approx 0,2924 \cdot 0,9563 \approx 0,2762$ , to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 30. (2 pkt)**

Udowodnij, że dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych  $x, y$  prawdziwa jest nierówność  $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ .

**I sposób rozwiązania**

Nierówność  $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$  przekształcamy równoważnie, otrzymując kolejno

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 &\geq 0, \\(x^3 - x^2y) + (y^3 - xy^2) &\geq 0, \\x^2(x - y) - y^2(x - y) &\geq 0, \\(x - y)(x^2 - y^2) &\geq 0, \\(x - y)^2(x + y) &\geq 0,\end{aligned}$$

Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż  $(x - y)^2 \geq 0$  dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$  oraz  $x + y \geq 0$ , gdyż liczby  $x$  i  $y$  są nieujemne. To kończy dowód.

**II sposób rozwiązania**

Nierówność  $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$  przekształcamy równoważnie, otrzymując kolejno

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 &\geq 0, \\(x^3 + y^3) - (x^2y + xy^2) &\geq 0, \\(x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y) &\geq 0, \\(x + y)(x^2 - xy + y^2 - xy) &\geq 0, \\(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) &\geq 0, \\(x + y)(x - y)^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż  $(x - y)^2 \geq 0$  dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$  oraz  $x + y \geq 0$ , gdyż liczby  $x$  i  $y$  są nieujemne. To kończy dowód.

**Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

Zdający otrzymuje ..... 1 p.  
gdy

- zapisze nierówność w postaci  $(x - y)(x^2 - y^2) \geq 0$

albo

- zapisze nierówność w postaci  $(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

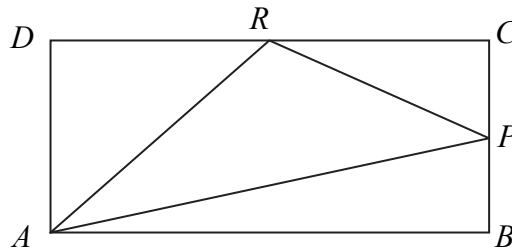
gdy uzasadni prawdziwość nierówności  $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający przejdzie w swoim rozumowaniu z postaci  $(x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y) \geq 0$  do postaci  $x^2 - xy + y^2 - xy \geq 0$  bez zaznaczenia, że skoro  $x$  i  $y$  są nieujemne, to ich suma też jest nieujemna, ale dokona dzielenia obu stron nierówności przez  $x + y$  i dalej przeprowadzi poprawne rozumowanie, to otrzymuje **1 punkt**.

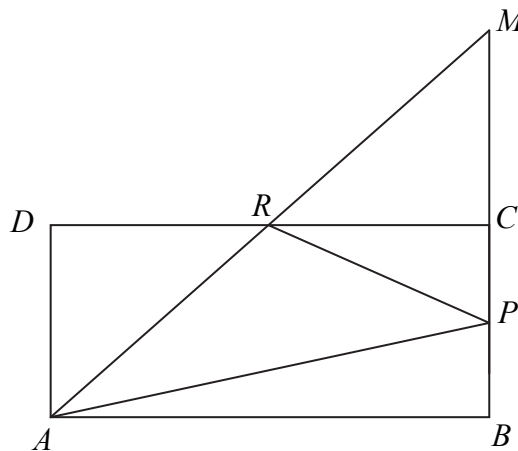
**Zadanie 31. (2 pkt)**

W prostokącie  $ABCD$  punkt  $P$  jest środkiem boku  $BC$ , a punkt  $R$  jest środkiem boku  $CD$ . Wykaż, że pole trójkąta  $APR$  jest równe sumie pól trójkątów  $ADR$  oraz  $PCR$ .



**I sposób rozwiązania**

Przedłużamy prostą  $AR$  oraz bok prostokąta  $BC$ . Proste te przecinają się w punkcie  $M$ . Rozpatrujemy trójkąty  $ADR$  oraz  $RCM$ .



$|\sphericalangle ARD| = |\sphericalangle CRM|$  (kąty wierzchołkowe), kąty przy wierzchołkach  $D$  i  $C$  są proste oraz  $|DR| = |RC|$ , stąd na podstawie cechy przystawania trójkątów kbk wnioskujemy, że trójkąt  $ADR$  jest przystający do trójkąta  $RCM$ . Z przystawania trójkątów mamy  $|AR| = |RM|$ .

Pole trójkąta  $APR$  jest równe polu trójkąta  $RPM$ , ponieważ oba trójkąty mają równe podstawy ( $|AR| = |RM|$ ) oraz taką samą wysokość poprowadzoną z wierzchołka  $P$ .

$$P_{\Delta APR} = P_{\Delta RPM} = P_{\Delta PCR} + P_{\Delta RCM}, \text{ a z faktu przystawania trójkątów } RCM \text{ oraz } ADR \text{ mamy:}$$
$$P_{\Delta APR} = P_{\Delta PCR} + P_{\Delta ADR}$$

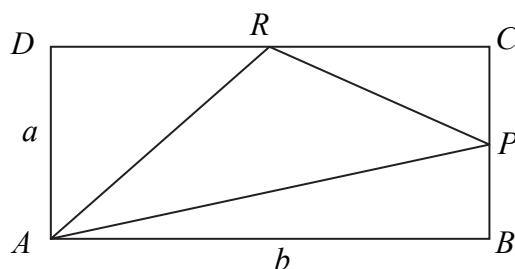
**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

Zdający otrzymuje ..... 1 p.  
gdy zapisze, że pole trójkąta  $APR$  jest równe polu trójkąta  $RPM$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

Zdający otrzymuje ..... 2 p.  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.



## II sposób rozwiązania



Oznaczmy:  $|AD| = a$  oraz  $|AB| = b$ , stąd  $|BP| = |PC| = \frac{a}{2}$ ,  $|CR| = |RD| = \frac{b}{2}$ .

Obliczamy pola trójkątów prostokątnych  $PCR$ ,  $RDA$ :  $P_{\Delta PCR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{8}$  oraz

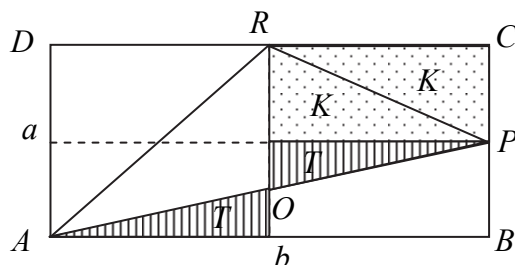
$$P_{\Delta RDA} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4} \text{ zatem } P_{\Delta PCR} + P_{\Delta RDA} = \frac{ab}{8} + \frac{ab}{4} = \frac{3ab}{8}.$$

Trójkąt  $ABP$  jest prostokątny i jego pole jest równe  $\frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{4}$ .

Pole trójkąta  $APR$  jest różnicą pola prostokąta  $ABCD$  i sumy pól trzech trójkątów prostokątnych  $ABP$ ,  $PCR$  oraz  $RDA$  zatem  $P_{\Delta APR} = ab - \left( 2 \cdot \frac{ab}{4} + \frac{ab}{8} \right) = \frac{3ab}{8}$ .

Otrzymaliśmy równość  $P_{\Delta APR} = P_{\Delta PCR} + P_{\Delta RDA}$ .

## III sposób rozwiązania



Podzielimy prostokąt  $ABCD$  na części, jak na rysunku.

Pole trójkąta  $APR$  zapisujemy w następujący sposób:

jest to suma pól trójkątów  $K = \frac{1}{8}ab$ ,  $T = \frac{1}{2}K = \frac{1}{16}ab$  oraz pola trójkąta  $AOR$ , którego pole jest

$$\text{równe: } P_{AOR} = \frac{1}{4}ab - T = \frac{1}{4}ab - \frac{1}{16}ab = \frac{3}{16}ab.$$

$$\text{Zapisujemy sumę: } P_{APR} = \frac{1}{8}ab + \frac{1}{16}ab + \frac{3}{16}ab = \frac{3}{8}ab$$

Pole trójkąta  $ARD$  jest równe  $2K = \frac{1}{4}ab$ . Sumujemy pola trójkąta  $ARD$  oraz  $PCR$

i otrzymujemy:  $P_{ARD} + P_{PCR} = \frac{1}{4}ab + \frac{1}{8}ab = \frac{3}{8}ab$ , czyli wykazaliśmy, że  $P_{ARD} + P_{PCR} = P_{APR}$ .

### Uwaga

Zamiast zapisywać pole prostokąta  $ABCD$  w zależności od długości boków możemy użyć innego oznaczenia, np.  $P$ , wtedy otrzymujemy:  $K = \frac{1}{8}P$ ,  $T = \frac{1}{16}P$ ,  $P_{AOR} = \frac{3}{16}P$  i dalej

$$P_{APR} = \frac{1}{8}P + \frac{1}{16}P + \frac{3}{16}P = \frac{3}{8}P \text{ oraz } P_{ARD} + P_{PCR} = \frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P = \frac{3}{8}P.$$

### Schemat oceniania II i III sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**

gdy zapisze, że pole trójkąta  $APR$  stanowi  $\frac{3}{8}$  pola prostokąta  $ABCD$ , np. zapisze

$$P_{APR} = \frac{1}{8}ab + \frac{1}{16}ab + \frac{3}{16}ab = \frac{3}{8}ab \text{ lub } P_{\Delta APR} = ab - \left(2 \cdot \frac{ab}{4} + \frac{ab}{8}\right) = \frac{3ab}{8} \text{ i na tym poprzestanie}$$

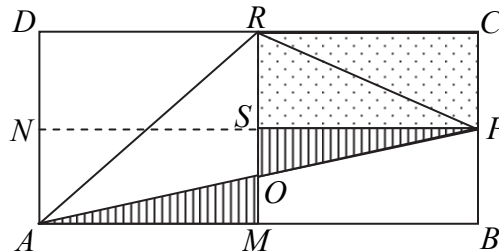
lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje** ..... **2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

### IV sposób rozwiązania

Poprowadźmy odcinki  $PN$  i  $RM$  łączące środki boków prostokąta. Niech  $S$  będzie punktem ich przecięcia.



Trójkąty  $ADR$  i  $RMA$  są przystające, więc mają równe pola, trójkąty  $PCR$  i  $RSP$  też są przystające, więc ich pola też są równe, także trójkąty  $AMO$  i  $PSO$  są przystające, więc ich pola też są równe. Zatem

$$\begin{aligned} P_{ADR} + P_{PCR} &= P_{AMR} + P_{RSP} = (P_{AOR} + P_{AMO}) + P_{RSP} = (P_{AOR} + P_{PSO}) + P_{RSP} = \\ &= P_{AOR} + (P_{PSO} + P_{RSP}) = P_{AOR} + P_{OPR} = P_{APR} \end{aligned}$$

co należało wykazać.

### Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**

gdy ustali, że trójkąty  $ADR$  i  $RMA$  są przystające, trójkąty  $PCR$  i  $RSP$  są przystające oraz trójkąty  $AMO$  i  $PSO$  są przystające i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje** ..... **2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

### Zadanie 32. (4 pkt)

Wyznacz równanie osi symetrii trójkąta o wierzchołkach  $A = (-2, 2)$ ,  $B = (6, -2)$ ,  $C = (10, 6)$ .

### I sposób rozwiązania

Obliczamy długości boków trójkąta  $ABC$ :  $|AB| = 4\sqrt{5}$ ,  $|BC| = 4\sqrt{5}$ ,  $|AC| = 4\sqrt{10}$ .

Zauważamy, że jest to trójkąt równoramienny, w którym  $|AB| = |BC| = 4\sqrt{5}$ , więc osią symetrii trójkąta  $ABC$  jest symetralna odcinka  $AC$ . By znaleźć równanie osi symetrii trójkąta wyznaczamy współrzędne środka odcinka  $AC$ :  $S = (4, 4)$ .

Wyznaczamy równanie prostej  $BS$ , korzystając ze wzoru na prostą przechodzącą przez dwa punkty:

$$y - 4 = \frac{-2-4}{6-4}(x-4),$$
$$y = -3x + 16.$$

Odpowiedź: Równanie osi symetrii trójkąta  $ABC$  ma postać:  $y = -3x + 16$ .

## II sposób rozwiązania

Obliczamy długości boków trójkąta  $ABC$ :  $|AB| = 4\sqrt{5}$ ,  $|BC| = 4\sqrt{5}$ ,  $|AC| = 4\sqrt{10}$ .

Zauważamy, że jest to trójkąt równoramienny, w którym  $|AB| = |BC| = 4\sqrt{5}$ , więc osią symetrii trójkąta  $ABC$  jest symetralna odcinka  $AC$ .

By znaleźć równanie osi symetrii trójkąta, wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej  $AC$ :  $a_{AC} = \frac{1}{3}$ , a następnie współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do  $AC$ :  $a = -\frac{1}{a_{AC}} = -3$ .

Wyznaczamy równanie prostej zawierającej symetralną boku  $AC$  i przechodzącej przez punkt  $B$ :

$$y + 2 = -3(x - 6),$$
$$y = -3x + 16.$$

Odpowiedź: Równanie osi symetrii trójkąta  $ABC$  ma postać:  $y = -3x + 16$ .

## III sposób rozwiązania

Obliczamy długości boków trójkąta  $ABC$ :  $|AB| = 4\sqrt{5}$ ,  $|BC| = 4\sqrt{5}$ ,  $|AC| = 4\sqrt{10}$ .

Zauważamy, że jest to trójkąt równoramienny, w którym  $|AB| = |BC| = 4\sqrt{5}$ , więc osią symetrii trójkąta  $ABC$  jest symetralna odcinka  $AC$ . Zatem jego osią symetrii jest symetralna boku  $AC$ , będąca zbiorem punktów równo oddalonych od obu końców odcinka.

Niech  $K(x, y)$  będzie punktem należącym do symetralnej boku  $AC$ . Zatem  $|AK| = |KC|$ .

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(10-x)^2 + (6-y)^2},$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 100 - 20x + x^2 + 36 - 12y + y^2,$$
$$24x + 8y - 128 = 0,$$
$$3x + y - 16 = 0,$$
$$y = -3x + 16.$$

Odpowiedź: Równanie osi symetrii trójkąta  $ABC$  ma postać:  $y = -3x + 16$ .

## Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 p.**

Zdający

- obliczy długości dwóch boków trójkąta  $ABC$ :  $|AB| = 4\sqrt{5}$ ,  $|AC| = 4\sqrt{10}$  i  $|BC| = 4\sqrt{5}$
- albo
- obliczy współrzędne środka odcinka  $AC$ :  $S = (4, 4)$
- albo
- obliczy współczynnik kierunkowy prostej  $AC$ :  $a_{AC} = \frac{1}{3}$
- albo

- obliczy współrzędne wektora  $AC$
- albo
- zapisze, że szukaną osią symetrii jest symetralna boku  $AC$
- i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- obliczy współrzędne środka odcinka  $AC$ :  $S = (4, 4)$  i współczynnik kierunkowy prostej  $AC$ :  $a_{AC} = \frac{1}{3}$

albo

- uzasadni, że szukaną osią symetrii jest symetralna boku  $AC$
- i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Uwaga**

Przyjmujemy, że jako uzasadnienie wystarczy rysunek w układzie współrzędnych.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- obliczy współrzędne środka odcinka  $AC$ :  $S = (4, 4)$  oraz współczynnik kierunkowy symetralnej boku  $AC$ :  $a = -3$

albo

- obliczy współrzędne środka odcinka  $AC$ :  $S = (4, 4)$  oraz zapisze, że oś symetrii tego trójkąta przechodzi przez punkt  $B$

albo

- obliczy współrzędne wektora  $AC$  oraz zapisze, że oś symetrii tego trójkąta przechodzi przez punkt  $B$  i jest prostopadła do wektora  $AC$

albo

- zapisze równanie symetralnej boku  $AC$ :  $\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(10-x)^2 + (6-y)^2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

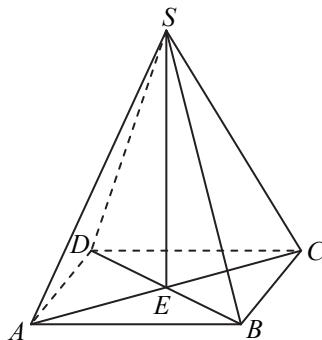
Zdający wyznaczy równanie osi symetrii trójkąta  $ABC$ :  $y = -3x + 16$  ( $3x + y - 16 = 0$ ).

**Uwaga**

Jeżeli zdający nie uzasadni, że osią symetrii trójkąta  $ABC$  jest symetralna boku  $AC$  (np. nie sporządzi rysunku w układzie współrzędnych albo po wyznaczeniu równania symetralnej boku  $AC$  nie sprawdzi, że punkt  $B$  leży na tej symetralnej), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

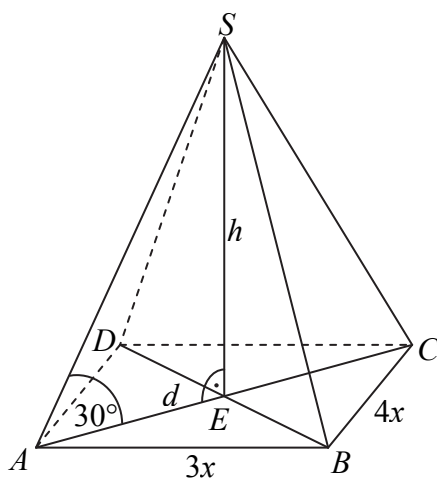
### **Zadanie 33. (4 pkt)**

Podstawą ostrosłupa  $ABCD$  jest prostokąt, którego boki pozostają w stosunku 3 : 4, a pole jest równe 192 (zobacz rysunek). Punkt  $E$  jest wyznaczony przez przecinające się przekątne podstawy, a odcinek  $SE$  jest wysokością ostrosłupa. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $30^\circ$ . Oblicz objętość ostrosłupa.



### Rozwiązanie

Ponieważ stosunek długości boków prostokąta  $ABCD$  jest równy  $3:4$ , więc możemy przyjąć, że  $|AB| = 3x$  i  $|BC| = 4x$ . Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie, jak na rysunku.



Pole podstawy ostrosłupa jest równe

$$P_{ABCD} = 3x \cdot 4x = 12x^2.$$

Zatem

$$12x^2 = 192,$$
$$x^2 = 16.$$

Stąd  $x = 4$ , więc  $|AB| = 3 \cdot 4 = 12$  i  $|BC| = 4 \cdot 4 = 16$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ABC$  otrzymujemy:

$$|AC|^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400.$$

Stąd  $|AC| = 20$ .

Tangens kąta  $SAE$  w trójkącie prostokątnym  $AES$  jest równy  $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$ . Stąd

$$h = \frac{1}{2}d \cdot \operatorname{tg}30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot 192 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{640\sqrt{3}}{3}.$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa  $V = \frac{640\sqrt{3}}{3}$ .

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania**..... 1 p.

Zdający obliczy długości boków prostokąta, będącego podstawą ostrosłupa: 16 i 12.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 p.

Zdający obliczy długość przekątnej prostokąta  $ABCD$ :  $|AC| = 20$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania**..... 3 p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa:  $h = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa:  $V = \frac{640\sqrt{3}}{3}$ .

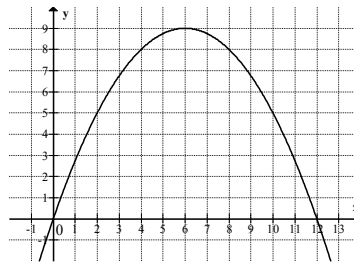
### Zadanie 34. (5 pkt)

Funkcja kwadratowa  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Zbiorem rozwiązań nierówności  $f(x) > 0$  jest przedział  $(0, 12)$ . Największa wartość funkcji  $f$  jest równa 9. Oblicz współczynniki  $a$ ,  $b$  i  $c$  funkcji  $f$ .

### I sposób rozwiązania

Funkcja  $f(x) = ax^2 + bx + c$  jest kwadratowa, więc  $a \neq 0$ . Przyjmuje ona największą wartość równą 9, zatem druga współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji, jest równa  $y_w = 9$  oraz  $a < 0$ .

Ponieważ zbiorem rozwiązań nierówności  $f(x) > 0$  jest przedział  $(0, 12)$ , więc miejscami zerowymi funkcji  $f$  są liczby 0 i 12. Możemy też narysować wykres funkcji  $f$ .



Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli – wykresu funkcji  $f$  jest równa

$$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 12}{2} = 6$$

Zapisujemy wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej:  $f(x) = a \cdot (x - 6)^2 + 9$ .

Dla argumentu 0 wartość funkcji jest równa 0, więc otrzymujemy równanie

$$0 = a \cdot (0 - 6)^2 + 9,$$

$$a = -\frac{1}{4}.$$

Wzór funkcji  $f$  ma więc postać  $f(x) = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 9$ , a po przekształceniu do postaci ogólnej

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x.$$

Współczynniki  $a, b, c$  funkcji  $f$  są więc równe:  $a = -\frac{1}{4}$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0$ .

## II sposób rozwiązania

Funkcja  $f(x) = ax^2 + bx + c$  jest kwadratowa, więc  $a \neq 0$ . Przyjmuje ona największą wartość równą 9, zatem druga współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji, jest równa  $y_w = 9$  oraz  $a < 0$ .

Ponieważ zbiorem rozwiązań nierówności  $f(x) > 0$  jest przedział  $(0, 12)$ , więc miejscami zerowymi funkcji  $f$  są liczby: 0 i 12. Stąd wynika, że pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji  $f$ , jest równa  $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 12}{2} = 6$ .

Możemy więc zapisać wzór funkcji  $f$  w postaci iloczynowej

$$f(x) = a \cdot x \cdot (x - 12)$$

Wierzchołek  $W(6, 9)$  paraboli będącej wykresem funkcji  $f$  jest jednym z punktów tego wykresu, więc

$$9 = a \cdot 6 \cdot (6 - 12),$$
$$a = -\frac{1}{4}.$$

Wzór funkcji  $f$  ma więc postać  $f(x) = -\frac{1}{4}x(x - 12)$ , a po przekształceniu do postaci ogólnej

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x,$$

z której odczytujemy współczynniki  $a, b, c$ :  $a = -\frac{1}{4}$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0$ .

## III sposób rozwiązania

Funkcja  $f(x) = ax^2 + bx + c$  jest kwadratowa, więc  $a \neq 0$ . Przyjmuje ona największą wartość równą 9, zatem druga współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji, jest równa  $y_w = 9$  oraz  $a < 0$ .

Ponieważ zbiorem rozwiązań nierówności  $f(x) > 0$  jest przedział  $(0, 12)$ , więc miejscami zerowymi funkcji  $f$  są liczby: 0 i 12. Stąd wynika, że pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji  $f$ , jest równa  $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 12}{2} = 6$ .

Mamy zatem trzy punkty o współrzędnych  $(0, 0)$ ,  $(12, 0)$ ,  $(6, 9)$  leżące na wykresie funkcji  $f$ .

Zatem

$$f(0) = 0 \text{ i } f(12) = 0 \text{ i } f(6) = 9,$$

czyli

$$c = 0 \text{ i } a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + c = 0 \text{ i } a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 9,$$
$$c = 0, 12a + b = 0, 12a + 2b = 3,$$

Stąd  $a = -\frac{1}{4}$  i  $b = 3$  i  $c = 0$ .

Odpowiedź:  $a = -\frac{1}{4}$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0$ .

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający zapisze

- .....m  
iejsca zerowe funkcji  $f$ :  $x_1 = 0$  i  $x_2 = 12$

albo

- .....  
drugą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji  $f$ :  $y_w = 9$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- .....z  
apíše wzór funkcji  $f$  w postaci  $f(x) = a \cdot x \cdot (x - 12)$

albo

- .....o  
bliczy współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji:  $W = (6, 9)$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający zapisze

- wzór funkcji  $f$  w postaci  $f(x) = a \cdot x \cdot (x - 12)$  i obliczy współrzędne wierzchołka jej wykresu:  $W = (6, 9)$

albo

- wzór funkcji  $f$  w postaci  $f(x) = a \cdot (x - 6)^2 + 9$

albo

- zapisze, że współczynnik  $c = 0$  oraz zapisze jedno z równań wynikających z podstawienia do wzoru funkcji współrzędnych wierzchołka paraboli lub współrzędnych punktu przecięcia z osią  $Ox$  niebędącego początkiem układu współrzędnych: np.:  $36a + 6b = 9$  lub  $144a + 12b = 0$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 p.**

Zdający

- zapisze, że współczynnik  $c = 0$  oraz zapisze układ równań 
$$\begin{cases} 144a + 12b = 0 \\ 36a + 6b = 9 \end{cases}$$

albo

- wyznaczy współczynnik  $a$ :  $a = -\frac{1}{4}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Zdający wyznaczy współczynniki  $a, b, c$ :  $a = -\frac{1}{4}$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0$ .